Von: "Peter Scholze" <scholze@math.uni-bonn.de>
An: "Lauritz Streck" <lstreck@gmx.de>
Betreff: Re: Beweis über die Existenz leicht abundanter Zahlen
Lieber Herr Streck,

mir war das Problem nicht bekannt (und googlen ergibt auch keine nennenswerten Treffer), jedoch ist die Tatsache, dass nur Quadratzahlen leicht abundant sein können, vom Niveau her eine Übungsaufgabe für eine Vorlesung zur Zahlentheorie -- was nicht Ihre Leistung schmälern soll, immerhin haben Sie sich alle Grundlagen selbst erarbeitet!

Mein Beweis wäre folgendermaßen. Man schreibt n = \prod_{r=1}^k p_r^{a_r}. Dann gilt für die Summe d(n) _aller_ Teiler von n (inklusive 1, n) die Formel

d(n) = \prod_{r=1}^k (p_r^{a_r+1}-1)/(p_r-1) . (Steht sogar in Wikipedia: http://de.wikipedia.org/wiki/Teilersumme, Satz 4.)

(Um die Definition von Teiler einfach zu halten, gelten 1 und n als Teiler von n. In allen Fällen bevorzugen Mathematiker die einfachste Definition, also jene, wo keine Spezialfälle extra ausgeschlossen werden müssen. Bei Primzahlen ist die Situation etwas komplizierter, aber hier hat der Wunsch nach einer eindeutigen Primfaktorzerlegung festgelegt, dass 1 keine Primzahl sein darf. Es gibt auch andere, "höhere", Gründe für das Ausschließen der 1. Die Definition von Teiler führt zu dieser einfachen Produktformel, die auch bei Ihnen auftaucht, wobei Sie die Summe 1 + p_r + ... + p_r^{a_r} noch nicht zu (p_r^{a_r+1}-1)/(p_r-1) umgeformt haben.)

Eine Zahl heißt dann leicht abundant, falls d(n) = 2n+1. Insbesondere ist d(n) ungerade, also jeder der Faktoren (p_r^{a_r+1} - 1)/(p_r-1) = 1 + p_r + ... + p_r^{a_r} ungerade. Jeder der Summanden ist ungerade; damit die Summe ungerade ist, muss also die Anzahl a_r + 1 der Summanden ungerade sein, und damit a_r gerade.

Es bleibt zu zeigen, dass für p_r = 2 auch a_r gerade ist. Ich habe mich über Ihr Argument modulo 3 gefreut. In der Tat, es ist jetzt entweder n ein Quadrat, oder n = 2m^2. Dann wäre d(n) = 4m^2 + 1 nicht durch 3 teilbar (durch Ausprobieren aller möglichen Reste von m modulo 3). Andererseits ist (2^{a_r + 1} - 1)/(2-1) = 2^{a_r + 1}-1 durch 3 teilbar, weil dann a_r + 1 = 2 b eine gerade Zahl ist, und somit 2^{a_r + 1} - 1 = 4^b - 1 = (1 + 4 + ... + 4^{b-1})(4-1), mit 4-1 = 3.

Ihre weiteren Überlegungen folgen auf ähnliche Weise. Ich hoffen, Sie haben weiterhin Spaß an der Beschäftigung mit Mathematik, und studieren vielleicht bald auch Mathematik. Ihre Ausführungen waren sehr klar dargestellt, wenn auch die Notation für mich gewöhnungsbedürftig war.

Viele Grüße,
Peter Scholze
> Guten Tag Herr Scholze,
> ich habe im Anhang meinen Beweis dafür angehängt, dass nur
> Quadratzahlen leicht abundant sein kann. Damit ist das alte

> griechische Problem, ob es leicht abundante Zahlen geben kann,
> zumindest teilweise gelöst.
> Ich bin 17, habe gerade mein Abitur gemacht und dadurch noch keinen
> Dozenten, dem ich das Paper vorlegen kann. Deshalb schicke ich den
> Beweis nun Ihnen.
> Ich weiß, dass Sie wahrscheinlich nicht viel Zeit haben, ich würde Sie
> aber trotzdem bitten, sich den Beweis
> einmal anzuschauen. Sie müssten ja eigentlich auch schnell erkennen
> können, ob etwas Murks ist oder nicht.
> Es kommen keine höheren Theorien der Universitätsmathematik vor, so
> dass erweiterte Kenntnisse der Zahlentheorie nicht notwendig sind. Die
> meisten Definitionen in der Arbeit sind sowieso meine eigenen. Nur,
> weil keine krassen Theorien aus der Universitätsmathematik vorkommen,
> konnte ich das Problem ja überhaupt angehen.
> So oft ich den Beweis überprüft habe, habe ich keinen Fehler gefunden,
> wenn Ihnen allerdings einer auffällt, würde ich mich freuen, wenn Sie
> ihn mir zeigen könnten.
> Da ich keine Erfahrung mit Publikationen habe, kann es gut sein,
> dass die Arbeit in der Form von einer üblichen
> Universitätspublikation abweicht. Ich hoffe, dass das nicht allzu
> schlimm ist. Die Arbeit ist aber zumindest mit LaTeX verfasst.
> Schöne Grüße und vielen Dank,
> Lauritz Streck